



Δόμηση Χρωών: Άλλο Θεωρία και άλλο πράξη

Κυρίες και κύριοι Σύεδροι, στην Τετραβίβλο του Γεωργίου Παχυμέρη και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο Ε' μπορεί να διαβάσει κανείς για τα γένη των τετραχόρδων και τις χρώδες αυτών τα εξής:

Γένος ἐστὶ ποιὰ τετάρων φθόγγων, ταῦτὸν δ' εἰπεῖν τετραχόρδου διαίρεσις κατὰ διάφορον ἰδέαν ἥθους.

[Γένος εἶναι κάποια διαίρεση τεσσάρων φθόγγων, δηλαδή αὐτοῦ που λέμε τετράχορδο, κατὰ διαφορετικὴ ἔκφραση τοῦ ἡθους.]¹

Γένη δὲ μελωδίας τρία, ἁρμονία, χρῶμα, διάτονον.

[Τα γένη τῆς μελωδίας εἶναι τρία, τὸ ἐναρμόνιο, τὸ χρωματικὸ καὶ τὸ διατονικόν.]

Ἄρμονία μὲν οὖν τὸ τοῖς μικροτάτοις² πλεονάσαν διαστήμασιν ἀπὸ τοῦ συνηρμόσθαι...

[Ἐναρμόνιο μὲν λοιπόν, εἶναι τὸ γένος στο οποίο πλεονάζουν τὰ ελάχιστα διαστήματα κατὰ τὴν σύνδεση...]

Διάτονον δὲ τὸ τοῖς τόνοις, ἥτοι τοῖς μείζοσι διαστήμασι, πλεονάζον, ἐπειδὴ σφοδρότερον ἢ φωνὴ κατ' αὐτὸ διατείνεται.

[Διατονικόν δε, εἶναι ἐκεῖνο στο οποίο πλεονάζουν οἱ τόνοι, δηλαδή τὰ μεγαλύτερα διαστήματα, ἐπειδὴ κατ' αὐτὸ ἡ φωνὴ υψώνεται πάρα πολύ.]

Χρῶμα δὲ τὸ δι' ἡμιτονίων διὰ τὸ μέσον ἀμφοῖν θεωρεῖσθαι, ἀπὸ μεταφορᾶς τοῦ φαιοῦ χρώματος τοῦ μέσου λευκοῦ καὶ μέλανος.

[Χρωματικόν δε εἶναι τὸ γένος που περιέχει ἡμιτόνια καὶ βρίσκεται στο μέσον των δύο προηγουμένων, ὅπως μεταφορικά τὸ φαιὸ χρῶμα εἶναι τὸ μέσον μεταξύ λευκοῦ καὶ μαύρου.]

Γίνονται δὲ αἱ τῶν γενῶν διαφοραὶ παρὰ τοὺς κινουμένους φθόγγους, δηλαδὴ τοὺς μέσους τοῦ τετραχόρδου, οἱ γὰρ ἄκροι ἐστώτες εἰσὶ.

[Οἱ δε διαφορές των γενῶν γίνονται ἀπὸ τους κινούμενους φθόγγους, δηλαδή τους μέσους τοῦ τετραχόρδου, διότι οἱ ἄκροι εἶναι ἐστώτες.]

¹ Ἡ μετάφραση ἔχει ληφθεῖ ἀπὸ τὴ Διδακτορικὴ διατριβὴ με θέμα «Ἡ ἀρμονικὴ τάξις κατὰ τὸν σοφώτατο πρωτόδικο καὶ δικαιοφύλακα Γεώργιο Παχυμέρη» τῆς Μαρίας Χ. Παπαδοπούλου, Μαθηματικού, Μουσικολόγου καὶ υποψηφίου διδάκτορος τοῦ Τμήματος Μουσικῶν Σπουδῶν τοῦ Πανεπιστημίου Αθηνῶν με ἐπιβλέποντα τὸν Καθηγητὴ Χ. Χ. Σπυρίδη.

² Ἐπειδὴ ἡ δομὴ τοῦ ἐναρμονίου τετραχόρδου εἶναι δίτονο, 1/4 τοῦ τόνου (δίεση), 1/4 τοῦ τόνου (δίεση), πλεονάζουν τὰ μικρότερα δυνατὰ μουσικὰ διαστήματα.

Χρόα δέ ἐστι γένους εἰδικὴ διαίρεσις.
[Χρόα δε εἶναι εἰδική διαίρεση του γένους.]

Χρόαι δὲ αἰ ρηταὶ καὶ γνώριμοι, κατὰ Πτολεμαῖον, ὀκτώ, ἁρμονίας μία, χρώματος δύο, διατόνου πέντε.

[Οἱ χροές δε οἱ ρητές καὶ γνωστές εἶναι, σύμφωνα με τον Πτολεμαῖο, οκτώ. Της ἁρμονίας εἶναι μία, του χρωματικού εἶναι δύο, του διατονικοῦ πέντε.]

Ἡ μὲν οὖν τῆς ἁρμονίας χρόα τῇ αὐτῇ τοῦ γένους διαιρέσει καὶ αὐτὴ κέχρηται, μονοειδὴς γάρ. Μελωδεῖται δὲ ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπιτέταρτον³ καὶ ἐπιεικοστό-
τритον καὶ ἐπιτεσσαρακοστόπεμπτον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ἡ μὲν λοιπὸν χρόα της ἁρμονίας χρησιμοποιεῖ καὶ αὐτὴ τὴν ἴδια διαίρεση του γένους, διότι εἶναι ἐνός εἶδους (μονοειδής). Μελωδεῖται δε κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ κατὰ ἐπιτέταρτο (5/4) καὶ ἐπιεικοστότрито (24/23) καὶ ἐπιτεσσαρακοστόπεμπτο (46/45) λόγο, ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ ἀντιστρόφως...]

Τῶν χρωματικῶν δὲ διαιρέσεων βαρυτέρα μὲν ἐστὶν ἡ τοῦ Μαλακοῦ χρώματος χρόα, ἥ μελωδεῖται ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπίπεμπτον καὶ ἐπιτεσσαρεσκαιδέκατον καὶ ἐπιεικοσθέβδομον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Των χρωματικῶν δε διαιρέσεων, βαρύτερη μὲν εἶναι ἡ χρόα του μαλακοῦ χρώματος, ἡ οποία μελωδεῖται κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ κατὰ ἐπίπεμπτο (6/5) καὶ ἐπιτεσσαρεσκαιδέκατο (15/14) καὶ ἐπιεικοσθέβδομο λόγο (28/27), ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

Ὁξύτερα δὲ ἡ τοῦ Συντόνου, ἥ μελωδεῖται ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπίεκτον καὶ ἐπιενδέκατον καὶ ἐπιεικοστόπρωτον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ὁξύτερη δε εἶναι του συντόνου, ἡ οποία καὶ μελωδεῖται κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ κατὰ ἐπίεκτο (7/6), ἐπιενδέκατο (12/11) καὶ ἐπιεικοστόπρωτο (22/21) λόγο, ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

Τῶν δὲ διατονικῶν διαιρέσεων, ἡ μὲν τοῦ Μαλακοῦ διατόνου χρόα μελωδεῖται, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπιέβδομον καὶ ἐπέννατον καὶ ἐπιεικοστόν λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Των δε διατονικῶν διαιρέσεων, ἡ μὲν χρόα του μαλακοῦ διατόνου μελωδεῖται, κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ κατὰ ἐφέβδομο (8/7) καὶ ἐπέννατο (10/9) καὶ ἐπιεικοστό λόγο (21/20), ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

Ἡ δὲ τοῦ Μαλακοῦ ἐντόνου χρόα μελωδεῖται ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπόγδοον καὶ ἐπιέβδομον καὶ ἐπιεικοσθέβδομον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ἡ δε χρόα του μαλακοῦ ἐντόνου μελωδεῖται κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ κατὰ ἐπόγδοο (9/8) καὶ ἐφέβδομο (8/7) καὶ ἐπιεικοσθέβδομο λόγο (28/27), ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

Ἡ δὲ τοῦ Συντόνου⁴ διατόνου χρόα μελωδεῖται, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπέννατον καὶ ἐπόγδοον καὶ ἐπιπεντεκαιδέκατον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ἡ δε χρόα του συντόνου διατόνου μελωδεῖται, κατεβαίνοντας μὲν πρὸς τὸ βαρὺ, κατὰ ἐπέννατο (10/9) καὶ ἐπόγδοο (9/8) καὶ ἐπιπεντεκαιδέκατο λόγο (16/15), ανεβαίνοντας δε πρὸς τὸ ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

³ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης., 2001, *Φάκελος με θέματα Μουσικῆς Ακουστικῆς*, Εκδόσεις Υπηρεσίας Πανεπιστημιακῶν Συγγραμμάτων Εθνικοῦ καὶ Καποδιστριακοῦ Πανεπιστημίου Αθηνῶν, Αθήνα, σελ. 367.

⁴ Ο ὅρος «σύντονος» υπονοεῖ δομὴ τετραχόρδου εἰς τὴν οποία ο ηγούμενος ὅρος 10/9 (με φορά ἀπὸ τον ὀξύτερο πρὸς τον χαμηλότερο φθόγγο) εἶναι μικρότερος του μέσου 9/8.

Ἡ δὲ τοῦ Διατόνου ὁμαλοῦ χροά μελωδεῖται, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπέννατον καὶ ἐπιδέκατον καὶ ἐπιενδέκατον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ἡ δὲ χροά του διατόνου ὁμαλοῦ μελωδεῖται, κατεβαίνοντας μεν προς το βαρὺ κατὰ ἐπέννατο (10/9) καὶ ἐπιδέκατο (11/10) καὶ ἐπιενδέκατο λόγο (12/11), ανεβαίνοντας δε προς το ὀξύ, ἀντίστροφα...]

Ἡ δὲ τοῦ διτονιαίου χροά μελωδεῖται ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ κατὰ ἐπόγδοον, ἐπόγδοον καὶ ἡμιτονιαῖον λόγον, ἐπὶ δὲ τὸ ὀξύ, ἐναντίως...

[Ἡ δὲ χροά του διτονιαίου μελωδεῖται κατεβαίνοντας μεν προς το βαρὺ κατὰ ἐπόγδοο (9/8), ἐπόγδοο (9/8) καὶ ἡμιτονιαῖο λόγο (256/243), ανεβαίνοντας δε προς το ὀξύ, ἀντιστρόφως...]

Αὗται αἱ ῥηταὶ χροαὶ καὶ γινώριμοι, τῆς μὲν ἁρμονίας μία, ἁρμονία λεγομένη τῶν χρωματικῶν δύο, βαρυτέρα μὲν ἢ τοῦ μαλακοῦ, ὀξύτερα δὲ ἢ τοῦ συντόνου, τῶν δὲ διατονικῶν πέντε, Μαλακὸν διάτονον, Μαλακὸν ἔντονον, Σύντονον διάτονον, Διάτονον ὁμαλὸν καὶ Διτονιαῖον.

[Αυτές είναι οι χροές για τις οποίες έγινε λόγος καὶ εἶναι γνωστές. Του μεν εναρμονίου εἶναι μία ἡ χροά, που λέγεται ἁρμονία. Των χρωματικῶν εἶναι δύο, βαρύτερη μεν εἶναι ἡ του μαλακοῦ, ὀξύτερη δε ἡ του συντόνου. Των δε διατονικῶν εἶναι πέντε, το μαλακὸ διάτονο, το μαλακὸ ἔντονο, το σύντονο διάτονο, το διάτονο ὁμαλὸ καὶ το διτονιαῖο.]

Δόμηση των Χροῶν των τριῶν Γενῶν με βάση τα Μαθηματικά

Ἡ παρούσα μελέτη των χροῶν εἰς τα τρία γένη εἶναι εντελῶς πρωτότυπη, βασίζεται στα Μαθηματικά των μουσικῶν διαστημάτων καὶ υλοποιήθηκε με κατάλληλο λογισμικὸ σε Ηλεκτρονικὸ Υπολογιστὴ, που συνέγραψα ἐπὶ τούτοις, βασιζόμενος στην Πτολεμαϊκὴ ρήσιν Χροά δὲ ἐστὶ γένους εἰδικὴ διαίρεσις. Σκοπὸς τῆς μελέτης ἦταν ἡ εὕρεσις του θεωρητικῶς πλήθους των χροῶν των τριῶν γενῶν καὶ ἡ συσχέτισή του με το πλήθος των χροῶν -κατὰ τον Κλαύδιον Πτολεμαῖον- που μας παραδίδει στην Τετράβιβλό του ο Παχυμέρης.

Ἡ μελέτη με τον ηλεκτρονικὸ υπολογιστὴ οδηγεῖ σε υπερτριπλάσιο πλήθος χροῶν ἀπὸ αὐτὸ που ο Κλαύδιος Πτολεμαῖος παρήγαγε, ὅπως μας μνημονεύει ο Παχυμέρης⁵ καὶ τούτο λόγω μιας -ἐκ πρώτης ὀψεως- αυθαίρετου Πτολεμαϊκῆς παραδοχῆς, την οποία ἀναφέρει ἐπίσης ο Παχυμέρης⁶, ὅτι δηλαδή ἀπὸ τα δύο μικρότερα διαστήματα του τετραχόρδου το ἓνα θα πρέπει νὰ εἶναι σχεδὸν διπλάσιον του ἄλλου.

Πίστευα ὅτι ἡ παραδοχὴ αὐτὴ ἐγένετο μόνον καὶ μόνον γιὰ νὰ εὐρεθοῦν κάποιες λύσεις σε μια ἀπλουστευμένη μορφή του ὄντως ἐξαιρετικὰ δυσκόλου προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως του επιτρίτου με ἐπιμορίους λόγους καὶ το πρόβλημα καθίσταται ἀκόμη δυσκολότερον, εἰς ἐπιχειρήσωμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἓναν ἢ δύο λόγους ἐπιμερεῖς.

Σκέφθηκα ὅτι με την αυθαίρετη αὐτὴ παραδοχὴ, πιθανῶς γιὰ πρακτικὸς λόγους τῆς μουσικῆς ἐκτελέσεως, ο Κλαύδιος Πτολεμαῖος ἐπεχείρησε νὰ καταστήσει σαφές το ἀκριβές μέγεθος των διαστημάτων τῆς ἀσαφούς Πυθαγορείου Προτάσεως

«Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαίρουσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα»,

[Οἱ παρυπάτες καὶ οἱ τρίτες δεν διαίρουν τὸ πυκνὸν σε ἴσα διαστήματα],

⁵ Τετράβιβλος, Κεφάλαιο Ε΄.

⁶ Τετράβιβλος, Κεφάλαιο Η΄, στίχος 63 [καὶ ἔστιν ὁ ἐλάττων πρὸς τὸν μείζονα ἑγγίστα ὑποδιπλάσιος].

την οποίαν αναφέρει ο Ευκλείδης ως 18^η Πρόταση στην πραγματεία του «Κατατομή Κανόνος»⁷.

Η διερεύνηση του όλου προβλήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η θεωρία καταλήγει σε ένα πολυπληθές σύνολο λύσεων, που τα μέλη κάποιων υποσυνόλων του ακουστικά συμπίπτουν, λόγω της «μόλις διακρίσιμης διαφοράς των ήχων»⁸. Πρόκειται για τη διακριτική ικανότητα του ακουστικού μας οργάνου, του αυτιού μας, που όταν η διαφορά των συχνοτήτων δύο ήχων είναι κάτω από κάποια τιμή, τότε το μουσικό τους διάστημα δεν γίνεται ακουστικά διακριτό.

Έτσι, λοιπόν, η μοναδική χρώα στο εναρμόνιο γένος, η αρμονία, που μνημονεύει ο Παχυμέρης έχει προβληματική δομή από ακουστικής πλευράς. Πράγματι ο «ἐπιτεσσαρακοστόπεμπτος» λόγος εκφράζει μουσικό διάστημα 2,2830 ηχομορίων⁹, το οποίο ούτε μπορεί να μελωδηθεί, ούτε να γίνει ακουστό. Σύμφωνα με τη Μουσική Ακουστική το μικρότερο σε μέγεθος μουσικό διάστημα, το οποίο μπορεί να μελωδηθεί και ακουστικώς να διακριθεί είναι τα 3 ηχομόρια, δηλαδή μια τεταρτημόριος δίεση κατά τον Αριστόξενο. Αυτή η χρώα πρέπει να απορριφθεί.

Στο γενικευμένο πρόβλημα των Χροών με επιμορίους λόγους μπορούν να δομηθούν ακόμη τρεις χρώες του εναρμονίου γένους. Εξ αυτών η πρώτη, η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 1^η, εμφανίζει διάστημα μεγέθους 2,6299 ηχομορίων. Και αυτή η χρώα για τους ίδιους λόγους απορρίπτεται.

Η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 2^η, έχει πυκνόν διαιρούμενο από την παρυπάτη (ή την τρίτη) σε δύο διαστήματα με μεγέθη 3,7777 και 2,9262 ηχομόρια, αντίστοιχα. Αμφότερα μελωδούνται και γίνονται αντιληπτά ακουστικώς. Επίσης αυτή η χρώα ικανοποιεί και την προαναφερθείσα Πυθαγόρειο απαίτηση, ότι δηλαδή Αί παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.

Άρα η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 2^η είναι αποδεκτή.

Η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 3^η, έχει πυκνόν διαιρούμενο από την παρυπάτη (ή την τρίτη) σε δύο περίπου ισομεγέθη διαστήματα με μεγέθη 3,4060 και 3,2979 ηχομόρια, αντιστοίχως. Αμφότερα μελωδούνται και γίνονται αντιληπτά ακουστικώς. Άρα και η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 3^η είναι αποδεκτή και μάλιστα, ύστερα από στρογγυλοποίηση των αριθμών στο ακέραιο μέρος, μπορεί να εκληφθεί ως ο Αριστοξένειος μετασχηματισμός της Σπυρίδειου 2ας χρώας, αφού ο Αριστόξενος διαιρεί το πυκνόν σε δύο ίσα διαστήματα, που το καθένα είναι ίσο με μία τεταρτημόριο δίεση. Στην πράξη, όμως, οι δύο αυτές χρώες, επειδή τα διαστήματα του πυκνού τους διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα, συμπίπτουν.

Συμπερασματικά λέμε (βλέπε Πίνακα Ι) ότι εκ των τεσσάρων δυνατών να δομηθούν με επιμορίους λόγους χροών της Αρμονίας ΔΥΟ είναι θεωρητικώς αποδεκτές, η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 3^η και η Αρμονίας Σπυρίδειος Χροα 4^η, οι οποίες, όμως, πρακτικώς συμπίπτουν. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η αυθαίρετη παραδοχή του Κλαυδίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός και, όσον αφορά στην Αρμονία, οδηγεί πρακτικά σε μία χρώα, ασχέτως

⁷ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης., 1998, ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομή Κανόνος, Εκδόσεις Γεωργιάδης, Αθήνα, σελ. 46.

⁸ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης., 1990, *Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Υπηρεσίας Δημοσιευμάτων του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, σελ. 138.

⁹ Ηχομόριον καλείται το μέγεθος του ενός από τα 72 ισομεγέθη μουσικά διαστήματα στα οποία χωρίζεται το διαπασών στη Βυζαντινή Μουσική.

του εάν αυτή δεν είναι η προτεινόμενη από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο, δικαιώνοντας κατά κάποιον τρόπο και τον Κλαύδιο Πτολεμαίο και τον Παχυμέρη.

Θεωρητικώς στο χρωματικό γένος δομούνται 13 χρώες. Εξ αυτών των 13 χρωών οι 7 χρώες δομούνται αμιγώς από επιμόριες σχέσεις, οι δε 6 χρώες δομούνται από δύο επιμόριες σχέσεις και μία επιμερή.

Συγκεκριμένα:

1. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του μαλακού χρώματος προστίθενται και πέντε Σπυρίδεις χρώες του μαλακού χρώματος. Εξ αυτών των χρωών οι 3 χρώες δομούνται αμιγώς από επιμόριες σχέσεις και οι 2 χρώες δομούνται από δύο επιμόριες σχέσεις και μία επιμερή.

Οι του μαλακού χρώματος Σπυρίδεις χρώες 1^η και 4^η απορρίπτονται, διότι εμπεριέχουν στο πυκνό τους διάστημα μεγέθους μικροτέρου των τριών ηχομορίων, το οποίον ούτε μελωδείται, ούτε ακουστικώς διακρίνεται.

Η χρώα του μαλακού χρώματος και οι Σπυρίδεις χρώες 2^α, 3^η και 5^η, παρόλο που έχουν διαφορετικές διαστηματικές δομές, τα διαστήματα του πυκνού τους διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα. Με άλλα λόγια, ενώ θεωρητικώς είναι διαφορετικές δομές χρωών, πρακτικώς συμπίπτουν. Και σ' αυτήν την περίπτωση η αυθαίρετη παραδοχή του Πτολεμαίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός και, όσον αφορά στο μαλακό χρώμα, δικαιώνει Κλαύδιο Πτολεμαίο και Παχυμέρη.

2. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του συντόνου χρώματος προστίθενται και έξι Σπυρίδεις χρώες του συντόνου χρώματος. Εξ αυτών των θεωρητικών χρωών οι 2 χρώες δομούνται αμιγώς από επιμόριες σχέσεις και οι 4 χρώες από δύο επιμόριες σχέσεις και μία επιμερή.

Και οι έξι Σπυρίδεις χρώες του συντόνου χρώματος από την άποψη του μεγέθους των διαστημάτων τους γίνονται αποδεκτές. Όμως, οι χρώες των παρακάτω ομάδων:

- ✓ του συντόνου χρώματος με την Σπυρίδειο 2^α και με τη Σπυρίδειο 3^η
- ✓ Σπυρίδειος 1^η με την Σπυρίδειο 4^η, με την Σπυρίδειο 5^η και με την Σπυρίδειο 6^η

παρόλο που έχουν διαφορετικές διαστηματικές δομές, τα διαστήματα του πυκνού τους διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα και, συνεπώς, πρακτικώς συμπίπτουν.

Συμπερασματικά λέμε (βλέπε Πίνακα II) ότι στο χρωματικό γένος θεωρητικώς γίνονται αποδεκτές 4 χρώες του μαλακού χρώματος –μία Πτολεμαϊκή και τρεις Σπυρίδεις- και 7 χρώες του συντόνου χρώματος –μία Πτολεμαϊκή και έξι Σπυρίδεις-. Πρακτικώς, όμως, στο μαλακό χρώμα η αυθαίρετη παραδοχή του Πτολεμαίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός και δεχόμεθα το άκουσμα μίας χρώας, ενώ στο σύντονο χρώμα τα πράγματα διαφοροποιούνται και δεχόμεθα το άκουσμα δύο χρωών.

Στο διατονικό γένος δομούνται 14 θεωρητικές χρώες. Εξ αυτών των 14 χρωών οι 5 χρώες δομούνται αμιγώς από επιμόριες σχέσεις. Εκ των υπολοίπων 9 χρωών τρεις χρώες δομούνται από μία επιμόριο σχέση και δύο επιμερείς και έξι χρώες δομούνται από δύο επιμόριες σχέσεις και μία επιμερή.

Συγκεκριμένα:

1. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του μαλακού διατόνου προστίθενται και τέσσερις Σπυρίδεις χρώες του μαλακού διατόνου, όλες θεωρητικώς αποδεκτές, όσον αφορά στο μέγεθος των διαστημάτων τους. Εξ αυτών των χρωών η μία δομείται αμιγώς από επιμόριες σχέσεις, δύο χρώες δομούνται από δύο επιμόριες σχέσεις

και μία επιμερής και, τέλος, μία χρώα δομείται από μία επιμόρριο σχέση και δύο επιμερείς. Όμως, παρόλο που οι πέντε αυτές χρώες έχουν διαφορετικές διαστηματικές δομές, τα διαστήματα του πυκνού τους διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα. Με άλλα λόγια, ενώ θεωρητικώς είναι διαφορετικές δομές χροών, πρακτικώς συμπίπτουν. Και σ' αυτήν την περίπτωση η αυθαίρετη παραδοχή του Πτολεμαίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός δίνοντάς μας έναν ακουστικό αντιπρόσωπο της χρώας του μαλακού διατόνου.

2. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του μαλακού εντόνου διατόνου προστίθενται και δύο Σπυρίδεις χρώες του μαλακού εντόνου διατόνου, όλες αποδεκτές, όσον αφορά στο μέγεθος των διαστημάτων τους. Και οι 2 χρώες δομούνται από δύο επιμόρριες σχέσεις και μία επιμερής. Επειδή και πάλι τα διαστήματα του πυκνού αυτών των τριών χροών διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα, παρόλο που θεωρητικώς είναι διαφορετικές δομές χροών, πρακτικώς συμπίπτουν. Και σ' αυτήν την περίπτωση η πράξη και όχι η θεωρία δικαιώνει τον Πτολεμαίο, όσον αφορά στην αυθαίρετη παραδοχή του.
3. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του συντόνου διατόνου προστίθεται και μία Σπυρίδεις χρώα του συντόνου διατόνου, θεωρητικώς αποδεκτή, όσον αφορά στο μέγεθος των διαστημάτων της. Η χρώα αυτή δομείται από μία επιμόρριο σχέση και δύο επιμερείς. Επειδή τα διαστήματα του πυκνού αυτών των δύο χροών διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα, παρόλο που θεωρητικώς είναι διαφορετικές δομές χροών, πρακτικώς συμπίπτουν. Και στην περίπτωση του συντόνου διατόνου η αυθαίρετη παραδοχή του Πτολεμαίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός και δικαιώνει Κλαύδιο Πτολεμαίο και Παχυμέρη. Στη μία Πτολεμαϊκή χρώα του διατόνου ομαλού προστίθενται και δύο Σπυρίδεις χρώες του διατόνου ομαλού, αμφότερες θεωρητικώς αποδεκτές, όσον αφορά στο μέγεθος των διαστημάτων τους. Η μία εξ αυτών των θεωρητικών χροών δομείται από δύο επιμόρριες σχέσεις και μία επιμερής και η άλλη δομείται από μία επιμόρριο σχέση και δύο επιμερείς. Επειδή τα διαστήματα του πυκνού αυτών των τριών χροών διαφέρουν κατά μεγέθη μη ακουστικώς διαφοροποιούμενα, παρόλο που θεωρητικώς είναι διαφορετικές δομές χροών, πρακτικώς συμπίπτουν. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η αυθαίρετη παραδοχή του Κλαυδίου Πτολεμαίου λειτουργεί σωστά ως ηθμός και, όσον αφορά στο διάτονο ομαλό, δικαιώνει Κλαύδιο Πτολεμαίο και Παχυμέρη.
4. Μία και μοναδική χρώα, αυτή του Κλαυδίου Πτολεμαίου, έχει την κλασσική δομή του διατονικού τετραχόρδου, δηλαδή δομείται από δύο επογδόους τόνους και ένα λείμμα.

Συμπερασματικά λέμε (βλέπε Πίνακα ΙΙΙ) ότι στο διατονικό γένος θεωρητικώς γίνονται αποδεκτές 5 χρώες του μαλακού διατόνου –μία Πτολεμαϊκή και τέσσερις Σπυρίδεις–, 3 χρώες του μαλακού εντόνου διατόνου –μία Πτολεμαϊκή και δύο Σπυρίδεις–, 2 χρώες του συντόνου διατόνου –μία Πτολεμαϊκή και μία Σπυρίδεις–, 3 χρώες του διατόνου ομαλού –μία Πτολεμαϊκή και δύο Σπυρίδεις– και, τέλος, 1 Πτολεμαϊκή διτονιαία χρώα, πρακτικώς, όμως, γίνονται ακουστά πέντε ακούσματα διατονικών χροών, αντιπροσωπευόμενα κάλλιστα από τα ισάριθμα Πτολεμαϊκά πρότυπα.

Κατόπιν όλων αυτών η Παχυμέρειος φράση:

«Χρόαι δὲ αἱ ῥηταὶ καὶ γνῶριμοι (μετὰ τὴν ἐννοίαν τοῦ πρακτικῶς ἐκτελέσιμοι), κατὰ Πτολεμαῖον, ὀκτώ ($2^3 = 8$), ἁρμονίας μία, χρώματος δύο, διατόνου πέντε»

διατυπώνεται ως ακολούθως:

«Χρόαι θεωρητικῶς δομητέαι κατὰ Σπυρίδην εἴκοσι καὶ ἑπτὰ ($3^3 = 27$), ἁρμονίας δύο, χρώματος ἑνδεκα, διατόνου τέτταραι καὶ δέκα ρηταὶ δὲ καὶ γινώριμοι, εννέα ($3^2 = 9$), ἁρμονίας μία, χρώματος τρεις, διατόνου πέντε».

Ο Παχυμέρης ρητὰ αναφέρει και το νόημα των λεγομένων του, ὅστερα ἀπὸ την παραπάνω διερεῦνηση, γίνεται κατανοητὸ ὅσον ἀφορᾷ στον ἡθμὸ, τον ὁποῖον χρησιμοποίησε:

Πολλὰ μὲν καὶ διάφοροι αἱ διαιρέσεις τοῦ ἐπιτρίτου καὶ οἱ ἐπιμόριοι λόγοι διάφοροι πρὸς σύστασιν αὐτοῦ, μόνοι δὲ οἱ τοιοῦτοι ἐπιμόριοι πρὸς ἀλλήλους ποιοῦσι τὰς συμφωνίας τὰς οὐκτῶ, ἅς καὶ χροᾶς λέγουσιν, ὁ ἐπιτέταρτος, ὁ ἐπιπέμπτος, ὁ ἐπιζῶς, ὁ ἐπιζῶς, ὁ ἐπόγδοος, ὁ ἐπιέννατος, ὁ ἐπιῶς, ὁ ἐπιιαῶς, ὁ ἐπιιδῶς, ὁ ἐπιιεῶς, ὁ ἐπικῶς, ὁ ἐπικαῶς, ὁ ἐπικαστότριτος, ὁ ἐπικασθέβδομος καὶ ὁ ἐπιτεσσαρακοντόπεμπος, ὁ δὲ τοῦ λείμματος λόγος, ἐπεὶ οὐκ ἐν λόγῳ ρητῷ θεωρεῖται, οὐ τούτοις τοῖς λόγοις τοῖς ιε συνείλεται.

[Για τον λόγο αὐτὸ πολλές καὶ διάφορες εἶναι οἱ διαιρέσεις του ἐπιτρίτου καὶ διάφοροι οἱ ἐπιμόριοι λόγοι για την σύστασή του. Μόνο δε, αὐτοὶ οἱ ἐπιμόριοι μεταξὺ τους δημιουργοῦν τις οὐκτῶ συμφωνίες, τις ὁποῖες ονομάζουν καὶ χροᾶς: ὁ ἐπιτέταρτος, ὁ ἐπιπέμπτος, ὁ ἐπικτός, ὁ ἐφέβδομος, ὁ ἐπόγδοος, ὁ ἐπέννατος, ὁ ἐπιδέκατος, ὁ ἐπιενδέκατος, ὁ ἐπιτεσσαρεσκαιδέκατος, ὁ ἐπιπεντεκαιδέκατος, ὁ ἐπιεκοστός, ὁ ἐπιεκοστόπρωτος, ὁ ἐπιεκοστότριτος, ὁ ἐπιεκοσθέβδομος, ὁ ἐπιτεσσαρακοστόπεμπος. Ο λόγος ὅμως του λείμματος, ἐπειδὴ δὲν θεωρεῖται σε ρητὸ λόγο, δὲν ἔχει συμπεριληφθεῖ στους παραπάνω δεκαπέντε λόγους.]

Προκειμένου να δομηθοῦν ὅλες οἱ 27 θεωρητικὲς χροᾶς, πέραν των 15 ἐπιμορίων σχέσεων καὶ τῆς μίας ἐπιμερούς, που ρητὰ αναφέρει ὁ Παχυμέρης, συνεργοῦν ἄλλες 13 ἐπιμόριες σχέσεις καθὼς ἐπίσης καὶ ἄλλες 13 ἐπιμερεῖς σχέσεις, ὅπως δείχνει ὁ Πίνακας IV.

Πίνακας IV: Παλαιές (με γκρι χρώμα) καὶ Νέες (με λευκὸ χρώμα)
Επιμόριες καὶ Επιμερεῖς σχέσεις, που δομοῦν τις 27 Χροᾶς των τριῶν Γενῶν

5/4	17/15	256/243
6/5	21/19	
7/6	23/21	
8/7	25/23	
9/8	27/25	
10/9	28/25	
11/10	29/27	
12/11	31/28	
13/12	32/29	
14/13	35/33	
15/14	38/35	
16/15	49/46	
19/18	52/49	
20/19		
21/20		

22/21		
24/23		
25/24		
26/25		
28/27		
29/28		
30/29		
31/30		
32/31		
35/34		
36/35		
40/39		
46/45		

Όλες αυτές οι θεωρητικές δομές των χροών, εκτελούμενες με κάθε συχνοτική ακρίβεια μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών στο Εργαστήριο, θα αποτελούσαν εξαιρετικό υλικό αφενός μεν για διάφορα Ψυχοακουστικά πειράγματα, αφετέρου δε για την άσκηση των αυτιών των μουσικών.

Συσχέτιση με τις Χρόες της Βυζαντινής Μουσικής

Οι χρόες κατά τον αλγόριθμον του Χρυσάνθου του εκ Μαδύτων^{10,11}, Μητροπολίτου Προύσης (†1843) αποδεικνύεται Μαθηματικώς¹² ότι είναι εις πλήθος 2.186, ενώ ο Χρυσάνθος, λόγω μαθηματικών λαθών που διέπραξε, αριθμεί μόνον τις 740. Επειδή αυτές χρόες επενεργούν εφ' ολοκλήρου του διαπασών, δεν θα είπω τίποτα περισσότερο γι' αυτές.

Η χρόα του ζυγού¹³ ή της διπλής διέσεως ♂ δεικνύει ποιότητα χρωματική, τίθεται επί του φθόγγου Δι και επενεργεί και του πενταχόρδου Νη-Δι. Δια τούτο δεν ασχολήθηκα με αυτήν.

Η χρόα της σπάθης ή της υφεσοδιέσεως $\text{—}^{\text{♂}}$ δεικνύει ποιότητα μάλλον εναρμονίου γένους, τίθεται συνήθως επί του φθόγγου Κε ή του Γα (περίπτωση σπανιωτάτη) και δεσπόζει ολοκλήρου του πενταχόρδου Γα-Νη ή Πα-Κε. Δια τούτο δεν ασχολήθηκα ούτε με αυτήν.

¹⁰ Χρυσάνθος, Αρχιεπίσκοπος Διρραχίου εκ Μαδύτων, 1832, *Θεωρητικόν Μέγα της Μουσικής*, Michele Weis, Τεργέστη. (Κεφάλαια Η' και Θ').

¹¹ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης., 1987, *Ψυχοακουστική & Μαθηματικά στη Βυζαντινή Μουσική*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

¹² Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, «Μαθηματική αντιμετώπιση του αλγορίθμου του Χρυσάνθου για τη δημιουργία των χροών της Βυζαντινής Μουσικής», ανακοίνωση στο Α' Πανελλήνιο Συνέδριο Βυζαντινής Μουσικής με θέμα «Η Βυζαντινή Μουσική και η Σύγχρονη Τεχνολογία», Αμφιθέατρο Πολεμικού Μουσείου, Αθήνα, 17-18 Δεκεμβρίου 1993. Πρακτικά σελ. 85-106.

¹³ Παναγιωτοπούλου, Δ. Γ., 1982, *Θεωρία και Πράξις της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, Έκδοσις Αδελφότητος Θεολόγων «Ο ΣΩΤΗΡ», Αθήναι.

Η χροά του κλιτού ή του ημιφθόρου ♩ δεικνύει ποιότητα εναρμόνιον (κατά τα Θεωρητικά), κανονικώς τίθεται επί του φθόγγου Δι και επενεργεί επί του τετραχόρδου Πα-Δι. Δια τούτο και ασχολήθηκα με αυτήν. Λαμβάνοντας τα μεγέθη των μουσικών διαστημάτων με στρογγυλοποίηση στο ακέραιο μέρος έχομεν το διάστημα Δι-Γα τριτημόριον μείζονος τόνου (4), το διάστημα Γα-Βου μείζονα τόνο (12) και το διάστημα Βου-Πα τριημιτόνιον (14). Και κατά την ανιούσα και κατά την κατιούσα φορά του τετραχόρδου τα διαστήματα διατηρούν τα προαναφερθέντα μεγέθη τους.

Είναι δυνατόν η φθορά του κλιτού να τεθεί και επί άλλου φθόγγου. Εις την περίπτωση αυτήν ο εν λόγω φθόγγος εκλαμβάνεται ως φθόγγος Δι και με βάσιν τον υποτιθέμενον Δι τροποποιούνται αναλόγως και τα άλλα διαστήματα του τετραχόρδου.

Τη διαστηματική αυτή δομή ($4,2403 \approx 4$, $11,7719 \approx 12$, $13,8704 \approx 14$ με στρογγυλοποίηση στο ακέραιο μέρος) συναντούμε στη Σπυρίδαιο 2^α χροά ή χροά του Μαλακού Εντόνου Διατόνου.

Πίνακας Ι: Χρόες του εναρμόνιου γένους

α/α	ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΧΡΟΩΝ	ΜΕΓΕΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΧΡΟΩΝ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΧΡΟΩΝ
1	$(5/4) \times (24/23) \times (46/45)$	$23.1788 + 4.4208 + 2.2830$	ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΧΡΟΑ
2	$(5/4) \times (26/25) \times (40/39)$	$23.1788 + 4.0740 + 2.6299$	ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 1η
3	$(5/4) \times (28/27) \times (36/35)$	$23.1788 + 3.7777 + 2.9262$	ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 2α
4	$(5/4) \times (31/30) \times (32/31)$	$23.1788 + 3.4060 + 3.2979$	ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 3η

Πίνακας II: Χρόες του χρωματικού γένους.

α/α	ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΧΡΩΩΝ	ΜΕΓΕΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΧΡΩΩΝ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΧΡΩΩΝ
1	(6/5) x (15/14) x (28/2)	18.9385 + 7.1666 + 3.7777	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ
2	(6/5) x (13/12) x (40/3)	18.9385 + 8.3144 + 2.6299	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 1η
3	(6/5) x (16/15) x (25/2)	18.9385 + 6.7039 + 4.2403	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 2α
4	(6/5) x (19/18) x (20/1)	18.9385 + 5.6162 + 5.3280	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 3η
5	(6/5) x <u>(25/23)</u> x (46/4)	18.9385 + 8.6612 + 2.2830	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 4η
6	(6/5) x <u>(29/27)</u> x (30/2)	18.9385 + 7.4227 + 3.5215	ΜΑΛΑΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 5η
7	(7/6) x (12/11) x (22/2)	16.0123 + 9.0382 + 4.8322	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ
8	(7/6) x (10/9) x (36/3)	16.0123 + 10.9442 + 2.9262	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 1η
9	(7/6) x (14/13) x <u>(52/4)</u>	16.0123 + 7.6979 + 6.1726	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 2α
10	(7/6) x (15/14) x (16/1)	16.0123 + 7.1666 + 6.7039	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 3η
11	(7/6) x <u>(23/21)</u> x (24/2)	16.0123 + 9.4496 + 4.4208	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 4η
12	(7/6) x <u>(31/28)</u> x (32/3)	16.0123 + 10.5726 + 3.2979	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 5η
13	(7/6) x <u>(32/29)</u> x (29/2)	16.0123 + 10.2254 + 3.6451	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΟΑ 6η

Πίνακας III: Χρόες του Διατονικού γένους.

α/α	ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΧΡΩΩΝ	ΜΕΓΕΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΧΡΩΩΝ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΧΡΩΩΝ
1	$(8/7) \times (10/9) \times (21/20)$	$13.8704 + 10.9442 + 5.0680$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ
2	$(8/7) \times (11/10) \times (35/33)$	$13.8704 + 9.9003 + 6.1120$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 1η
3	$(8/7) \times (13/12) \times (14/13)$	$13.8704 + 8.3144 + 7.6979$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 2α
4	$(8/7) \times (21/19) \times (19/18)$	$13.8704 + 10.3961 + 5.6162$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 3η
5	$(8/7) \times (23/21) \times (49/46)$	$13.8704 + 9.4496 + 6.5626$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 4η
6	$(9/8) \times (8/7) \times (28/27)$	$12.2346 + 13.8704 + 3.7777$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΕΝΤΟΝΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ
7	$(8/7) \times (17/15) \times (35/34)$	$13.8704 + 13.0012 + 3.0111$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΕΝΤΟΝΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 1η
8	$(8/7) \times (28/25) \times (25/24)$	$13.8704 + 11.7719 + 4.2403$	ΜΑΛΑΚΟΥ ΕΝΤΟΝΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 2α
9	$(10/9) \times (9/8) \times (16/15)$	$10.9442 + 12.2346 + 6.7039$	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ
10	$(9/8) \times (32/29) \times (29/27)$	$12.2346 + 10.2254 + 7.4227$	ΣΥΝΤΟΝΟΥ ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 1η
11	$(10/9) \times (11/10) \times (12/11)$	$10.9442 + 9.9003 + 9.0382$	ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΟΜΑΛΟΥ
12	$(10/9) \times (10/9) \times (27/25)$	$10.9442 + 10.9442 + 7.9943$	ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΟΜΑΛΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 1η
13	$(10/9) \times (21/19) \times (38/35)$	$10.9442 + 10.3961 + 8.5424$	ΔΙΑΤΟΝΟΥ ΟΜΑΛΟΥ ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΧΡΩΑ 2α
14	$(9/8) \times (9/8) \times (256/243)$	$12.2346 + 12.2346 + 5.4135$	ΛΙΤΟΝΙΑΙΟΥ